UNDERSÖGELSE

AF EN CLASSE AF INTEGRALER BESLÆGTEDE MED DE ELLIPTISKE

(FORTSÆTTELSE AF AFHANDLINGEN BETITLET: REDUCTION AF EN CLASSE AF INTEGRALER o. s. v.)

VED

C. RAMUS,

PROFESSOR I MATHEMATIKEN VED KJÖBENHAVNS UNIVERSITET.

1. De tre Functioner, vi have betegnet ved U^0, U^2 og R^1, kunne, naar Parametrene hvoraf de afhænge ere reelle, undergaae mærkelige Transformationer, dog fornemmelig naar de ere complette d. e. naar Amplituden er $= \frac{\pi}{2}$.

Den complette Function U^0 være betegnet ved U_1, nemlig

$$U_1(n, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + n \sin^2\varphi) . \frac{d\varphi}{\Delta(c, \varphi)}. \tag{1}$$

Udvikles log $(1 + n \sin^2\varphi)$ efter stigende Potenser af $n \sin^2\varphi$ og sættes

$$Z^{2m} = \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2m}\varphi . d\varphi}{\Delta(c, \varphi)},$$

erholdes

$$2 U_1(n, c) = n Z^2 - \frac{n^2}{2} Z^4 + \frac{n^3}{3} Z^6 - \frac{n^4}{4} Z^8 + \&c.,$$

men ifölge en bekjendt Formel (*Traité des fonctions elliptiques* T. II Pag. 536) haves

$$Z^{2m} = c^{-m} \int_0^{\pi} \frac{\cos m\varphi . d\varphi}{\sqrt{1 + c^2 - 2c\cos\varphi}}, \tag{2}$$

altsaa

$$2\,U_{\text{I}}(n,c)=\int_0^{\pi}\frac{d\phi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\phi}}\left[\frac{n}{c}\cos\phi-\frac{n^2}{2c^2}\cos 2\phi+\frac{n^3}{3c^3}\cos 3\phi-\frac{n^4}{4c^4}\cos 4\phi+\&c.\right]$$

Summeres nu Rækken under Integraltegnet ifölge den bekjendte Udvikling

$$\tfrac{1}{2}\log(1+t^2+2t\cos\phi)=t\cos\phi-\tfrac{1}{2}t^2\cos 2\phi+\tfrac{1}{3}t^3\cos 3\phi-\tfrac{1}{4}t^4\cos 4\phi+\&c,$$

erholdes

$$4\,U_{\text{I}}(n,c)=\int_0^{\pi}\frac{\log\left(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\phi\right)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\phi}}\,d\phi. \qquad (3)$$

Indsættes heri

$$1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\phi=\left(1-\frac{n}{c}\right)^2+4\frac{n}{c}\cos^2\tfrac{1}{2}\phi,$$

$$\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}=(1+c)\sqrt{1-\frac{4c}{(1+c)^2}\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi},$$

og sættes $\phi=\pi-2\psi$, fremkommer

$$2\,U_{\text{I}}(n,c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\left[\left(1-\frac{n}{c}\right)^2+4\frac{n}{c}\sin^2\psi\right]}{(1+c)\sqrt{1-\frac{4c}{(1+c)^2}\sin^2\psi}}\,d\psi,$$

fölgelig

$$\left.\begin{aligned}2\,U_{\text{I}}(n,c)&=\frac{2\log\left(1-\frac{n}{c}\right)}{1+c}F^{\text{I}}(c^{\text{I}})+\frac{1}{1+c}U_{\text{I}}(n,{}^{\text{I}}c^{\text{I}})\\ n^{\text{I}}&=\frac{4nc}{(c-n)^2},\qquad c^{\text{I}}=\frac{2\sqrt{c}}{1+c}\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Ifölge den ældre Modulusscala (*l'ancienne échelle des modules*), hvor c^{I} er det paa c fölgende Led i den Retning hvor Modulerne ere voxende, er

$$F^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}}) = (1+c)\, F^{\mathrm{I}}(c),$$

altsaa kan den fundne Formel (4) saaledes fremstilles:

$$U_{\mathrm{I}}(n,c) = \log\left(1-\frac{n}{c}\right).\ F^{\mathrm{I}}(c) + \frac{1}{2(1+c)}\, U_{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}}, c^{\mathrm{I}}). \qquad (5)$$

Ligesaa er

$$U_{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}}) = \log\left(1-\frac{n^{\mathrm{I}}}{c^{\mathrm{I}}}\right).\ F^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}}) + \frac{1}{2(1+c^{\mathrm{I}})}\, U_{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{II}}, c^{\mathrm{II}})$$

eller

$$U_{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}}) = (1+c)\log\left(1-\frac{n^{\mathrm{I}}}{c^{\mathrm{I}}}\right).\ F^{\mathrm{I}}(c) + \frac{1}{2(1+c^{\mathrm{I}})}\, U_{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{II}}, c^{\mathrm{II}})$$

idet $n^{\mathrm{II}} = \frac{4\,n^{\mathrm{I}}\,c^{\mathrm{I}}}{(c^{\mathrm{I}}-n^{\mathrm{I}})^2}$, $c^{\mathrm{II}} = \frac{2\sqrt{c^{\mathrm{I}}}}{1+c^{\mathrm{I}}}$. Elimineres $F^{\mathrm{I}}(c)$ mellem den sidste Ligning og Ligning (5), erholdes fölgende Relation mellem de tre complette Functioner $U_{\mathrm{I}}(n,c)$, $U_{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}})$, $U_{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{II}},c^{\mathrm{II}})$:

$$(1+c)\log\left(1-\frac{n^{\mathrm{I}}}{c^{\mathrm{I}}}\right) U^{\mathrm{I}}(n,c) - \log\left[\left(1-\frac{n}{c}\right)\sqrt{1-\frac{n^{\mathrm{I}}}{c^{\mathrm{I}}}}\right].\ U_{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}}) + \frac{\log\left(1-\frac{n}{c}\right)}{2(1+c^{\mathrm{I}})}\, U_{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{II}},c^{\mathrm{II}}) = 0. \qquad (6)$$

2. $\log(1+n\sin^2\varphi)$ i Formlen (1) er bleven udviklet efter stigende Potenser af $n\sin^2\varphi$; men man kunde ogsaa udvikle den efter Cosinusser af multiplicerede Buer, transformere ifölge (2), og derefter summere under Integraltegnet ifölge Udviklingen efter stigende Potenser. Ifölge (1) er

$$2\,U_{\mathrm{I}}(n,c) = -2\log\alpha.\ F^{\mathrm{I}}(c) + \int_0^{\pi} \log(\alpha + \alpha\, n\sin^2\varphi).\ \frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)},$$

og da $\alpha + \alpha\, n\sin^2\varphi = \alpha + \frac{\alpha\, n}{2} - \frac{\alpha\, n}{2}\cos 2\varphi$, sættes

$$\alpha + \frac{\alpha\, n}{2} = 1 + t^2,\quad \frac{\alpha\, n}{2} = 2t,$$

hvorved $\alpha(1+n) = (1+t)^2$ og $\alpha = (1-t)^2$, altsaa $\sqrt{1+n} = \frac{1+t}{1-t}$, hvorved igjen

$$t = \frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1}, \qquad \alpha = \frac{4}{(\sqrt{1+n}+1)^2}.$$

Man erholder som Fölge heraf

$$2\,U_1(n,c) = 4\log\frac{\sqrt{1+n}+1}{2}.\,F^1(c) + \int_0^\pi \log(1+t^2-2t\cos 2\varphi).\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}$$

Ved heri at indsætte

$$\log(1+t^2-2t\cos 2\varphi) = -2(t\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}t^2\cos 4\varphi + \tfrac{1}{3}t^3\cos 6\varphi + \&c.)$$

$$\Delta(c,\varphi) = \frac{1+b}{2}\sqrt{1+\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2 + 2\,\frac{1-b}{1+b}\cos 2\varphi},$$

idet $b^2 = 1-c^2$, ved fremdeles at bemærke at

$$\int_0^\pi \log(1+t^2-2t\cos 2\varphi).\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log(1+t^2-2t\cos 2\varphi).\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}$$

og

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2m\varphi.\ d\varphi}{\sqrt{1+\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2+2.\frac{1-b}{1+b}\cos 2\varphi}} = 2\int_0^\pi \frac{\cos m\varphi.\ d\varphi}{\sqrt{1+\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2+2.\frac{1-b}{1+b}\cos\varphi}},$$

og ved dernæst at transformere hvert enkelt Led ifölge (2), erholdes:

$$2\,U_1(n,c) = \left\{\begin{array}{l} 4\log\frac{\sqrt{1+n}+1}{2}.\,F^1(c) \\ + \frac{4}{1+b}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta(c^0,\varphi)}[t\,c^0\sin^2\varphi - \tfrac{1}{2}t^2\,c^{0\,2}\sin^4\varphi + \tfrac{1}{3}t^3\,c^{0\,3}\sin^6\varphi\ \&c.] \end{array}\right.$$

$$= 4\log\frac{\sqrt{1+n}+1}{2}.\,F^1(c) + \frac{4}{1+b}\int_0^\pi \log(1+n^0\sin^2\varphi).\frac{d\varphi}{\Delta(c^0,\varphi)},$$

idet $c^{\circ} = \frac{1-b}{1+b}$ er det Led som er nærmest lavere end c i den ældre Modulusscala, og $n^{\circ} = tc^{\circ} = \frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1} c^{\circ}$, hvorved erholdes

$$\frac{\sqrt{1+n}+1}{2} = \frac{1}{1-\frac{n^{\circ}}{c^{\circ}}}, \quad F^{I}(c) = (1+c^{\circ}) F^{I}(c^{\circ}), \quad \frac{2}{1+b} = 1+c^{\circ}.$$

Altsaa er

$$2\,U_{I}(n,c) = -4(1+c^{\circ}) \log\left(1-\frac{n^{\circ}}{c^{\circ}}\right) . F^{I}(c^{\circ}) + 4(1+c^{\circ})\, U_{I}(n^{\circ},c^{\circ})$$

eller

$$U_{I}(n^{\circ},c^{\circ}) = \log\left(1-\frac{n^{\circ}}{c^{\circ}}\right) . F^{I}(c^{\circ}) + \frac{1}{2(1+c^{\circ})} U_{I}(n,c),$$

hvilket Resultat falder sammen med (5), thi ifölge Udtrykket for n° er $\sqrt{1+n} = \frac{c^{\circ}+n^{\circ}}{c^{\circ}-n^{\circ}}$, altsaa $n = \frac{4c^{\circ}n^{\circ}}{(c^{\circ}-n^{\circ})^2}$, hvoraf sees at n°, n, n^{I}, danne tre consecutive Led af Parametrenes Række, ligesom c°, c, c^{I} af Modulernes.

3. Denne Transformation af den complette Function U_{I}, udtrykt i (5), kunde som grundet paa uendelige Rækker muligen være bundet til visse Indskrænkninger hidrörende fra Betingelserne for disse Rækkers Convergents. Disse Betingelser reducere sig i den förste Methode til $n < c$, men da den anden Methode blot kræver at $t < 1$, hvilket, da $t = \frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1}$, stedse er opfyldt, maa Resultatet gjælde almindeligt. Kun er det herved at bemærke, at naar $n > c$, maa $\log\left(1-\frac{n}{c}\right)$ forandres til

$\log\left(\frac{n}{c}-1\right)$; ligesaa maa, naar $c^{o} < n^{o}$, istedetfor $\sqrt{1+n}=\frac{c^{o}+n^{o}}{c^{o}-n^{o}}$ sættes $\sqrt{1+n}=\frac{n^{o}+c^{o}}{n^{o}-c^{o}}$. Er $n=c$, ville begge Leddene i Formlerne (4) og (5) være uendelige med modsatte Fortegn, men i dets Sted erholdes iflge (3)

$$4\,U_{I}(c,c)=\int_{0}^{\pi}\frac{\log 4+2\log\cos\frac{1}{2}\varphi}{(1+c)\sqrt{1-c_{I}^{2}\cos^{2}\frac{1}{2}\varphi}}d\varphi=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log 4+2\log\sin\psi}{(1+c)\,\Delta(c^{I},\psi)}d\psi$$

eller

$$U_{I}(c,c)=\log 2.\,F^{I}(c)+\frac{1}{1+c}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin\psi}{\Delta(c^{I},\psi)}d\psi.$$

Man kan altsaa overhoved udtrykke $U_{I}(n,c)$ ved Hjælp af $F^{I}(c)$ og $U_{I}(n^{I(p)},c^{I(p)})$ eller $U_{I}(n^{o(p)},c^{o(p)})$. Da Parametrene ere stærkt aftagende i den samme Retning som Modulerne, erholdes som en fortrinlig Approximationsformel:

$$U_{I}(n,c)=\left\{\begin{aligned}&2(1+c^{o})\log\frac{\sqrt{1+n}+1}{2}.\,F^{I}(c^{o})+2^{2}(1+c^{o})(1+c^{oo})\log\frac{\sqrt{1+n^{o}}+1}{2}.\,F^{I}(c^{oo})\\&+2^{3}(1+c^{o})(1+c^{oo})(1+c^{ooo})\log\frac{\sqrt{1+n^{oo}}+1}{2}.\,F^{I}(c^{ooo})\ \&c.\end{aligned}\right.$$

$$=F^{I}(c)\left[2\log\frac{\sqrt{1+n}+1}{2}+2^{2}\log\frac{\sqrt{1+n^{o}}+1}{2}+2^{3}\log\frac{\sqrt{1+n^{oo}}+1}{2}\ \&c.\right]$$

eller ved at tilföie Udtrykket for Resten

$$U_{I}(n,c)=\left\{\begin{aligned}&F^{I}(c)\left[2\log\frac{\sqrt{1+n}+1}{2}+2^{2}\log\frac{\sqrt{1+n^{o}}+1}{2}\&c.---+2^{p}\log\frac{\sqrt{1+n^{o(p-1)}}+1}{2}\right]\\&+2^{p}(1+c^{o(p)})\,U_{I}(n^{o(p)},c^{o(p)})\end{aligned}\right.\qquad(7)$$

Ved at sætte $c=c^{o}=o$, altsaa $n^{o}=o$, erholdes

$$U_{I}(n,o)=\pi \log \frac{\sqrt{1+n}+1}{2}, \qquad (8)$$

hvis Rigtighed pröves ved

$$\frac{dU_{I}(n,o)}{dn}=\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2}\varphi.\ d\varphi}{1+n\sin^{2}\varphi}$$

og

$$\int_{o}^{\varphi} \frac{\sin^{2}\varphi.\ d\varphi}{1+n\sin^{2}\varphi}=\frac{1}{n}\left[\varphi-\frac{\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\operatorname{tg}\varphi.\sqrt{1+n})}{\sqrt{1+n}}\right]$$

altsaa

$$\frac{dU_{I}(n,o)}{dn}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+n}+1+n} \text{ og } U_{I}(n,o)=\frac{\pi}{2}\int_{o}^{n}\frac{dn}{\sqrt{1+n}+1+n}=\pi \log \frac{\sqrt{1+n}+1}{2}.$$

Er n meget lille, saa at dens 2den og höiere Potenser kunne bortkastes, erholdes blot

$$U_{I}(n,o)=\frac{\pi}{4}n,$$

som finder Anvendelse med Hensyn til $U_{I}(n^{o(p)}, c^{o(p)})$ i Aproximationsformlen (7), naar p er tilstrækkelig stor.

4. Paa samme Maade, som Formlen (2) er bleven beviist paa det citerede Sted hos *Legendre*, kan ogsaa fölgende bevises:

$$\int_{o}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+c^{2}-2c\cos\varphi}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{\operatorname{tg}\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^{2}-2c\cos\varphi}\right).\cos m\varphi.\ d\varphi=\pi c^{m}\int_{o}^{\theta}\frac{\sin^{2m}\varphi.\ d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}, \qquad (9)$$

som er mere almindelig, og hvorunder (2) er indbefattet som specielt Tilfælde ved at sætte $\theta=\pi$. Ved altsaa i det indefinite Integral

$$U(n,c,\theta)=\int_{o}^{\theta}\log(1+n\sin^{2}\varphi).\ \frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}$$

at udvikle $\log(1+n\sin^2\phi)$ efter stigende Potenser af $n\sin^2\phi$, transformere hvert enkelt Led ifölge (9) og atter summere under Integraltegnet, erholdes:

$$U(n,c,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\,\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{\text{tg}\,\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}\right)d\varphi \tag{10}$$

hvorunder (3) er indbefattet ved at sætte $\theta=\frac{\pi}{2}$. Ved at differentiere og atter integrere med Hensyn til θ erholdes:

$$U(n,c,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\theta d\theta\int_0^\pi \log\left(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi\right).\frac{(1-c^2\sin^4\theta)\,d\varphi}{\Delta(c,\theta)[1+c^2\sin^4\theta-2c\sin^2\theta\cos\varphi]},$$

men som bekjendt er

$$\frac{1-c^2\sin^4\theta}{1+c^2\sin^4\theta-2c\sin^2\theta\cos\varphi}=1+2[c\sin^2\theta\cos\varphi+c^2\sin^4\theta\cos2\varphi+c^3\sin^6\theta\cos3\varphi+\&c.],$$

altsaa naar Integralet af hvert Led med Hensyn til θ transformeres ifölge (9), alene det förste Led undtaget, som giver $\int_0^\theta\frac{d\theta}{\Delta(c,\theta)}=F(c,\theta)$, erholdes:

$$U(n,c,\theta)=\frac{1}{2\pi}F(c,\theta)\int_0^\pi \log\left(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi\right).\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\frac{\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\psi}}\,\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{\text{tg}\,\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2c\cos\psi}\right).(\cos\psi\cos\varphi+\cos2\psi\cos2\varphi+\cos3\psi\cos3\varphi\&c.)d\varphi d\psi. \tag{11}$$

Det bestemte Integral $\int_0^\pi \log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi)d\varphi$ indeholder ingen imaginære Elementer, thi $1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi=(1+\frac{n}{c}\cos\varphi)^2+\frac{n^2}{c^2}\sin^2\varphi$ er stedse positiv, men da Logarithmen af denne Störrelse varierer fra $\log(1+\frac{n}{c})^2$ til $\log(1-\frac{n}{c})^2$ naar φ varierer fra o til π, vil det kunne indeholde baade positive og negative Elementer. Man kan stedse betragte n som positiv i dette Integral, thi naar n erholder modsat Fortegn, ville blot de Elementer, som fremkomme fra $\varphi=\frac{\pi}{2}$ til $\varphi=\pi$ blive ombyttede med dem fra $\varphi=o$ til $\varphi=\frac{\pi}{2}$, hvorved Integralets Værdie bliver uforandret. Man maa nu skjælne mellem de to Tilfælde $n<c$ og $n>c$. I det förste Tilfælde ville de positive og negative Elementer nöiagtigen hæve hinanden; man har nemlig (Art. 1)

$$\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi)=\log(1-\frac{n}{c})^2+\log(1+n^{\mathrm{I}}\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi)$$

altsaa

$$\int_0^\pi \log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi).d\varphi=2\pi\log(1-\frac{n}{c})+\int_0^\pi \log(1+n^{\mathrm{I}}\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi).d\varphi,$$

og ved at sætte $\varphi=\pi-2\psi$ bliver

$$\int_0^\pi \log(1+n^{\mathrm{I}}\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi).d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(1+n^{\mathrm{I}}\sin^2\psi).d\psi=2U_1(n^{\mathrm{I}},o),$$

men ifölge (8) er

$$U_1(n^{\mathrm{I}},o)=\pi.\log\frac{\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}+1}{2}=\pi\log\frac{1}{1-\frac{n}{c}},$$

altsaa

$$\int_0^\pi \log\left(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi\right).\,d\varphi = o. \qquad (12)$$

Derimod, naar $n > c$, er

$$\log\left(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi\right) = 2\log\left(\frac{n}{c}-1\right)+\log\left(1+n^{\mathrm{I}}\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\right)$$

idet $n^{\mathrm{I}} = \frac{4nc}{(n-c)^2}$, altsaa

$$\int_0^\pi \log\left(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi\right).\,d\varphi = 2\pi\log\left(\frac{n}{c}-1\right)+2\pi\log\frac{\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}+1}{2},$$

hvor $\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}} = \frac{n+c}{n-c}$, $\frac{\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}+1}{2} = \frac{n}{n-c} = \frac{\frac{n}{c}}{\frac{n}{c}-1}$, fölgelig

$$\int_0^\pi \log\left(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi\right).\,d\varphi = 2\pi\log\frac{n}{c}, \qquad (13)$$

hvoraf tillige sees, at Integralet endnu er o naar $n=c$. Disse Resultater (12) og (13) ere forhen paa en anden Maade fundne af *Poisson* i *Journal de l'école polytechnique* 17me *cah.* Pag. 617.

Formlen (11) indeholder fremdeles den uendelige Række

$$u = \cos\psi\cos\varphi+\cos 2\psi\cos 2\varphi+\cos 3\psi\cos 3\varphi+\&c.$$

hvis Værdie er $= -\frac{1}{2}$ for alle Værdier af ψ og φ som ere uligestore, men $= \infty$ for $\psi=\varphi$. For at bevise dette sættes

$$u_m = t\cos\psi\cos\varphi+t^2\cos 2\psi\cos 2\varphi+t^3\cos 3\psi\cos 3\varphi --- +t^m\cos m\psi\cos m\varphi,$$

fölgelig

$$2u_m = \left.\begin{matrix}\cos(\psi+\varphi)\\+\cos(\psi-\varphi)\end{matrix}\right| t + \left.\begin{matrix}\cos 2(\psi+\varphi)\\+\cos 2(\psi-\varphi)\end{matrix}\right| t^2 + \left.\begin{matrix}\cos 3(\psi+\varphi)\\+\cos 3(\psi-\varphi)\end{matrix}\right| t^3 --- + \left.\begin{matrix}\cos m(\psi+\varphi)\\+\cos m(\psi-\varphi)\end{matrix}\right| t^m,$$

men det er bekjendt, at naar

$$y = t\cos a+t^2\cos 2a+t^3\cos 3a --- +t^m\cos ma$$

haves

$$y = \frac{1}{1+t^2-2t\cos\alpha}\left(t\cos\alpha - t^2 + t^{m+2}\cos m\alpha - t^{m+1}\cos(m+1)\alpha\right),$$

som let bevises ved at multiplicere begge Sider af Ligningen med 2 $\cos\alpha$, altsaa naar Rækken fortsættes i det uendelige idet t er en ægte Brök, der kan tages ligesaa nær Eenheden som man vil, bliver

$$y = \frac{t\cos\alpha - t^2}{1+t^2-2t\cos\alpha},$$

og ved at sætte $t = 1$

$$y = -\frac{1-\cos\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = -\frac{1}{2},$$

dog undtagen naar $\alpha = o$ hvorved

$$y = \frac{t-t^2}{1+t^2-2t} = \frac{t}{1-t},$$

som er $= \infty$ naar $t = 1$. Dette anvendt paa begge Rækkerne, hvoraf $2u_m$ er sammensat, giver, ved at tage $m = \infty$ og $t = 1$, den ovenfor angivne Bestemmelse for u.

Det dobbelte Integral, som Formlen (11) indeholder, maa altsaa beregnes ved först af sætte $u = -\frac{1}{2}$ og udföre begge Integrationerne fra o til π, saa at alle de Elementer, som svare til $\varphi = \psi$, ere med herunder indbefattede, hvilket er tilladt efterdi Summen af alle disse Elementer for $u = -\frac{1}{2}$ er en forsvindende Störrelse; men dernæst maa man tilföie Summen af alle de til $\varphi = \psi$ svarende Elementer idet man sætter

$$u = \tfrac{1}{2}.\frac{t\cos(\psi-\varphi) - t^2}{1+t^2-2t\cos(\psi-\varphi)}$$

og bagefter $t = 1$. Denne sidste Sum af Elementer udtrykkes ved et Integral af den Slags, som af *Cauchy* ere benævnede *intégrales singulières* (*Mém. présentés par divers savans* &c. T. I. Pag. 678) d. e. saadanne, som ere tagne mellem to uendelig nær ved hinanden beliggende Grændser; thi först integreres med Hensyn til φ fra $\psi-\varepsilon$ til $\psi+\varepsilon$, dernæst med Hensyn til ψ fra o til π, eller omvendt först med Hensyn til ψ fra $\varphi-\varepsilon$ til $\varphi+\varepsilon$, dernæst med Hensyn til φ fra o til π, idet ε er uendelig lille og idet man efter Integrationen sætter $t = 1$. Fölges den förste Orden af Integrationerne, haves dette Udtryk:

$$\int_0^\pi d\psi \int_{\psi-\varepsilon}^{\psi+\varepsilon} \frac{\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\psi}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2c\cos\psi}\right). \frac{t\cos(\psi-\varphi)-t^2}{2(1+t^2-2t\cos(\psi-\varphi))} d\varphi, \tag{14}$$

som maa behandles paa den Maade, *Poisson* i et aldeles lignende Tilfælde har anvendt (*Journal de l'école polytechnique* 19me *cah.* Pag. 433). Bemærker man nemlig at φ, forsaavidt den under Integraltegnet $\int_{\psi-\varepsilon}^{\psi+\varepsilon}$ findes udenfor Functionen u, ingen Indflydelse kan have paa Resultatet ved at variere fra $\psi-\varepsilon$ til $\psi+\varepsilon$, vil man ligefrem kunne indsætte ψ i dens Sted*), hvorved Alt undtagen u gaaer udenfor dette Integraltegn, saa at man blot har at betragte

$$\int_{\psi-\varepsilon}^{\psi+\varepsilon} \frac{t\cos(\psi-\varphi)-t^2}{2(1+t^2-2t\cos(\psi-\varphi))} d\varphi.$$

---

*) Angaaende dette Punkt s. *Poisson*, *théorie mathématique de la chaleur* Pag. 215.

Dette Integral vil ved at sætte $\psi - \varphi = z$ og $t = 1 - g$, samt udvikle efter Potenser af g og z betragtede som uendelig smaa, reduceres til

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{g\,dz}{2(g^2+z^2)},$$

som ikke forandres ved at udvide Grændserne fra $-\varepsilon, +\varepsilon$ til $-\infty, +\infty$, efterdi alle endelige Værdier af z ville lade Elementerne af dette Integral forsvinde; altsaa, da

$$\int \frac{g\,dz}{2(g^2+z^2)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{z}{g}\right),$$

erholdes

$$\int_{\psi-\varepsilon}^{\psi+\varepsilon} \frac{t\cos(\psi-\varphi) - t^2}{2(1+t^2-2t\cos(\psi-\varphi))}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Fölgelig vil Udtrykket (14) være ligegjældende med

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\psi)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\psi}}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\Delta\,(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2c\cos\psi}\right)d\psi. \tag{15}$$

Formlen (11) vil altsaa formedelst de fundne Ligninger (12) og (13) i Forbindelse med Reductionen af det dobbelte Integral give:

for $n < c$ og $n = c$

$$U(n,c,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}\right)\cdot d\varphi$$

og for $n > c$

$$U(n,c,\theta) = \log\frac{n}{c}.\,F(c,\theta) - \frac{1}{\pi}\log\frac{n}{c}.\int_0^\pi \frac{\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}\right)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\log\left(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi\right)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}\right).\,d\varphi$$

hvor man maa iagttage, hvis n er negativ, istedetfor $\log\frac{n}{c}$ at sætte $\frac{1}{2}\log\left(\frac{n}{c}\right)^2$. Begge disse Formler falde imidlertid nöiagtigen sammen, thi

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}\right)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\,d\varphi$$

differentieret med Hensyn til θ giver

$$\int_0^\pi \frac{1-c^2\sin^4\theta}{\Delta(c,\theta)\left[1+c^2\sin^4\theta-2c\sin^2\theta\cos\varphi\right]}\,d\varphi,$$

men som bekjendt er

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

altsaa ved at sætte $a = 1+c^2\sin^4\theta$, $b = -2c\sin^2\theta$, som giver $\sqrt{a^2-b^2} = 1-c^2\sin^4\theta$, erholdes

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}\right)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\,d\varphi = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\Delta(c,\theta)} = F(c,\theta).$$

Dette viser, hvorledes Formlen (11) almindeligen kan reduceres tilbage igjen til (10), omendskjöndt begge Integralerne, som den indeholder, undergaae en pludselig Forandring i deres Værdier ved Overgangen fra $n < c$ til $n > c$.

5. Functionen af anden Art U^2 være, naar den er complet, betegnet ved U_2, nemlig

$$U_2(n,c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+n\sin^2\varphi).\ \frac{\sin^2\varphi.\,d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}. \qquad (16)$$

Udvikles $\log(1+n\sin^2\varphi)$ efter stigende Potenser af $n\sin^2\varphi$, og transformeres hvert Led ifölge (2), erholdes

$$2\,U_2(n,c) = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\left[\frac{n}{c^2}\cos 2\varphi - \frac{n^2}{2c^3}\cos 3\varphi + \frac{n^3}{3c^4}\cos 4\varphi - \frac{n^4}{4c^5}\cos 5\varphi + \&c.\right].$$

Som bekjendt er

$$\tfrac{1}{2}\log(1+t^2+2t\cos\varphi) = t\cos\varphi - \tfrac{1}{2}t^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}t^3\cos 3\varphi\ \&c.$$

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{t\sin\varphi}{1+t\cos\varphi}\right) = t\sin\varphi - \tfrac{1}{2}t^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}t^3\sin 3\varphi\ \&c.,$$

altsaa ved at multiplicere den förste af disse med $\cos\varphi$, den anden med $\sin\varphi$ og subtrahere, haves

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2}\cos\varphi.\ \log(1+t^2+2t\cos\varphi) - \sin\varphi.\ \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \dfrac{t\sin\varphi}{1+t\cos\varphi}\right) \\ = t\cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}t^2\cos 3\varphi + \tfrac{1}{3}t^3\cos 4\varphi\ \&c., \end{cases}$$

som ogsaa erholdes ved at bemærke, at denne Række sat = T giver

$$t^2\frac{dT}{dt} = t^2\cos 2\varphi - t^3\cos 3\varphi + t^4\cos 4\varphi\ \&c.$$

$$= \frac{1+t\cos\varphi}{1+t^2+2t\cos\varphi} - 1 + t\cos\varphi$$

eller

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\cos 2\varphi + t\cos\varphi}{1+t^2+2t\cos\varphi}$$

altsaa

$$T = \int_0^t \frac{\cos 2\varphi + t\cos\varphi}{1 + t^2 + 2t\cos\varphi}\, dt.$$

Fölgelig ved at summere Rækken under Integraltegnet erholdes:

$$2\,U_2(n,c) = \frac{1}{c}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\Big[\tfrac{1}{2}\cos\varphi.\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi) - \sin\varphi.\,\mathrm{arc}\Big(\mathrm{tg} = \frac{n\sin\varphi}{c+n\cos\varphi}\Big)\Big]. \quad (17)$$

Vi ville först betragte det specielle Tilfælde n = c. Det giver

$$2\,U_2(c,c) = \frac{1}{c}\int_0^\pi \frac{\cos\varphi.(\log 2 + \log\cos\frac{1}{2}\varphi) - \frac{1}{2}\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\, d\varphi.$$

Ved at sætte $\varphi = \pi - 2\psi$ erholdes

$$\int_0^\pi \frac{\cos\varphi.\,d\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}} = \frac{2}{1+c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\psi - 1}{\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}\, d\psi = \frac{2}{1+c}.\Big[\Big(\frac{2}{c_{\mathrm{I}}^{2}} - 1\Big)F^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}}) - \frac{2}{c_{\mathrm{I}}^{2}}E^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}})\Big],$$

men ifölge Theorien af den ældre Modulusscala er

$$F^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}}) = (1+c)F^{\mathrm{I}}(c)$$

$$E^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}}) = \frac{2}{1+c}E^{\mathrm{I}}(c) - (1-c)F^{\mathrm{I}}(c),$$

altsaa, idet $c_{\mathrm{I}}^{2} = \frac{4c}{(1+c)^2}$,

$$\int_0^\pi \frac{\cos\varphi.\ d\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}} = \frac{2}{c}\big[F^{\mathrm{I}}(c) - E^{\mathrm{I}}(c)\big].$$

Fremdeles er ved at sætte $\varphi = \pi - 2\psi$

$$\int_0^\pi \frac{\cos\varphi.\ \log\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\, d\varphi = \frac{2}{1+c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin^2\psi - 1)\log\sin\psi}{\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}\, d\psi,$$

men ifölge Art. 3 er

$$\frac{1}{1+c}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin\psi}{\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}d\psi = U_{\mathrm{I}}(c,c) - \log 2 . F^{\mathrm{I}}(c),$$

altsaa

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi\log\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}d\varphi = 2\log 2 . F^{\mathrm{I}}(c) - 2\,U_{\mathrm{I}}(c,c) + \frac{4}{1+c}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\psi\log\sin\psi}{\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}d\psi.$$

Endelig er ved deleviis Integration

$$\int\frac{\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}d\varphi = \frac{\varphi}{c}\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi} - \frac{1}{c}\int\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}\,d\varphi$$

altsaa

$$\int_0^{\pi}\frac{\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}d\varphi = \frac{1+c}{c}\pi - \frac{2(1+c)}{c}E^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}})$$

$$= \frac{1+c}{c}\pi + \frac{2b^2}{c}F^{\mathrm{I}}(c) - \frac{4}{c}E^{\mathrm{I}}(c).$$

Fölgelig erholdes for n = c

$$U_2(c,c) = \begin{cases} -\frac{1+c}{c^2}.\frac{\pi}{4} + \left(\frac{1+c}{c^2}\log 2 - \frac{b^2}{2c^2}\right)F^{\mathrm{I}}(c) \\ -\frac{\log 2 - 1}{c^2}E^{\mathrm{I}}(c) - \frac{1}{c}U_{\mathrm{I}}(c,c) + \frac{2}{c(1+c)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\psi\log\sin\psi}{\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}d\psi. \end{cases}$$

For almindeligen at transformere Formlen (17) sætte vi

$$V = \int_0^{\pi}\frac{\log\left(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi\right)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\cos\varphi\,d\varphi.$$

Man vil da have:

$$V = 2\log\left(1-\frac{n}{c}\right)\int_0^\pi \frac{\cos\varphi.\, d\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}} + \int_0^\pi \frac{\log(1+n^{I}\cos^2\frac{1}{2}\varphi)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{4}{c}\log\left(1-\frac{n}{c}\right)\cdot\left[F^{I}(c)-E^{I}(c)\right] - \frac{2}{1+c}U_1(n^{I},c^{I}) + \frac{4}{1+c}U_2(n^{I},c^{I}),$$

men ifölge (5) er

$$-\frac{2}{1+c}U_1(n^{I},c^{I}) = 4\log\left(1-\frac{n}{c}\right)\cdot F^{I}(c) - 4\,U_1(n,c),$$

altsaa

$$V = \frac{4}{c}\log\left(1-\frac{n}{c}\right)\cdot\left[(1+c)F^{I}(c)-E^{I}(c)\right] - 4\,U_1(n,c) + \frac{4}{1+c}U_2(n^{I},c^{I}).$$

Fremdeles sætte vi

$$Y = \int \frac{\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{n\sin\varphi}{c+n\cos\varphi}\right)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\sin\varphi\, d\varphi$$

og vi betegne ved Y_1 det samme Integral taget mellem Grændserne o og π. Ved deleviis Integration erholdes

$$Y = \begin{cases} \frac{1}{c}\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}.\ \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{n\sin\varphi}{c+n\cos\varphi}\right) \\ -\frac{n}{c}\int\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}.\ \frac{n+c\cos\varphi}{c^2+n^2+2nc\cos\varphi}d\varphi, \end{cases}$$

fölgelig

$$Y_1 = \frac{1+c}{c}\omega - \frac{n}{c}\int_0^\pi\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}.\ \frac{n+c\cos\varphi}{c^2+n^2+2nc\cos\varphi}d\varphi$$

hvor ω er saaledes bestemt. For alle Værdier af n beliggende mellem $+$ c og $-$ c er $\omega = o$, efterdi $\frac{n\sin\varphi}{c+n\cos\varphi}$ ikke vil kunne blive uendelig naar φ varierer fra o til π, fölgelig arc $\left(tg = \frac{n \sin\varphi}{c + n \cos\varphi}\right)$ ikke naae Værdien $\frac{\pi}{2}$, men maa variere fra o, som den er for $\phi = o$, og vende tilbage igjen til o for $\phi = \pi$. For $n = c$, som er det Tilfælde vi allerede have betragtet, er arc $\left(tg = \frac{n \sin\varphi}{c + n \cos\varphi}\right) = \frac{1}{2}\phi$, altsaa $\omega = \frac{\pi}{2}$; og for $n = -c$ er arc $\left(tg = \frac{n \sin\varphi}{c + n \cos\varphi}\right) = \frac{\phi - \pi}{2}$, altsaa $\omega = \frac{1-c}{1+c} \cdot \frac{\pi}{2}$. For n positiv $>$ c vil $\cos\phi = -\frac{c}{n}$ gjöre arc $\left(tg = \frac{n \sin\varphi}{c + n \cos\varphi}\right) = \frac{\pi}{2}$, hvorefter denne Bue fremdeles voxer, som sees af dens Differential-Coefficient, der er bestandig positiv, altsaa $\omega = \pi$. Samme Bestemmelse for ω finder Sted, naar n er större negativ end $-c$; thi arc $\left(tg = \frac{n \sin\varphi}{c + n \cos\varphi}\right)$ vil som bestandig voxende blive $\frac{\pi}{2}$ for $\cos\phi = -\frac{c}{n}$, men denne Værdie af ϕ, som i foregaaende Tilfælde var $> \frac{\pi}{2}$, er her $< \frac{\pi}{2}$.

Fremdeles er

$$\sqrt{1 + c^2 - 2c\cos\varphi} = (1+c)\sqrt{1 - c_1{}^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi},$$
$$n + c\cos\varphi = n - c + 2c\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$c^2 + n^2 + 2nc\cos\varphi = (c-n)^2 (1 + n^1 \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi),$$

altsaa ved at sætte $\phi = \pi - 2\psi$ haves

$$Y_1 = \frac{1+c}{c}\omega - \frac{2n(1+c)}{c(c-n)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta(c^1,\psi)(n - c + 2c\sin^2\psi)}{1 + n^1 \sin^2\psi} d\psi$$
$$= \frac{1+c}{c}\left[\omega - \frac{1}{2}\frac{n^1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta(c^1,\psi)(n - c + 2c\sin^2\psi)}{1 + n^1 \sin^2\psi} d\psi\right],$$

som er aldeles reductibelt til elliptiske Functioner. Man har nemlig

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}{1+n^{\mathrm{I}}\sin^2\psi}\,d\psi = \left(1+\frac{c_{\mathrm{I}}^2}{n^{\mathrm{I}}}\right)\Pi^{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}}) - \frac{c_{\mathrm{I}}^2}{n^{\mathrm{I}}}F^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}}),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n^{\mathrm{I}}\sin^2\psi}{1+n^{\mathrm{I}}\sin^2\psi}\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)\,d\psi = E^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}}) - \left(1+\frac{c_{\mathrm{I}}^2}{n^{\mathrm{I}}}\right)\Pi^{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}}) + \frac{c_{\mathrm{I}}^2}{n^{\mathrm{I}}}F^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}}),$$

altsaa, idet $n^{\mathrm{I}} = \frac{4nc}{(c-n)^2}$, $c^{\mathrm{I}} = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$,

$$Y_{\mathrm{I}} = \frac{1+c}{c}\left[\omega + \frac{(1+n)(n+c^2)(c+n)}{n(c-n)(1+c)^2}\Pi^{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}}) - E^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}}) - \frac{(c-n)(c+n)}{n(1+c)^2}F^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}})\right]$$

$$= \frac{1+c}{c}\omega + \frac{(1+n)(n+c^2)(c+n)}{nc(c-n)(1+c)}\Pi^{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}}) - \frac{2}{c}E^{\mathrm{I}}(c) + \frac{(1+n)(n-c^2)}{nc}F^{\mathrm{I}}(c).$$

Ifölge (17) er $U_2(n,c) = \frac{1}{4c}V - \frac{1}{2c}Y_{\mathrm{I}}$, altsaa haves

$$U_2(n,c) = \left\{\begin{array}{l} \frac{\log(1-\frac{n}{c})}{c^2}\left[(1+c)F^{\mathrm{I}}(c) - E^{\mathrm{I}}(c)\right] - \frac{1}{c}U_{\mathrm{I}}(n,c) + \frac{1}{c(1+c)}U_{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}}) \\ -\frac{1+c}{2c^2}\omega - \frac{(1+n)(n+c^2)(c+n)}{2nc^2(c-n)(1+c)}\Pi^{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}}) + \frac{1}{c^2}E^{\mathrm{I}}(c) - \frac{(1+n)(n-c^2)}{2nc^2}F^{\mathrm{I}}(c) \end{array}\right\} \quad (18)$$

hvor det maa iagttages, hvis $1-\frac{n}{c}$ er negativ, at forandre $\log(1-\frac{n}{c})$ til $\log(\frac{n}{c}-1)$. Som bekjendt er $\Pi^{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}})$ reductibel deels til de complette Functioner $F^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}})$, $E^{\mathrm{I}}(c^{\mathrm{I}})$, deels til $F(b^{\mathrm{I}},\theta)$, $E(b^{\mathrm{I}},\theta)$ hvis n^{I} hörer til de circulaire Parametre, derimod til $F(c^{\mathrm{I}},\theta)$, $E(c^{\mathrm{I}},\theta)$ hvis den hörer til de logarithmiske, idet Amplituden θ er Parametrens Vinkel. Betegne vi ved W alle de Led, som i Formlen (18) ere sammensatte af elliptiske Functioner, kan den korteligen skrives saaledes:

$$U_2(n,c) = W - \frac{1}{c} U_1(n,c) + \frac{1}{c(1+c)} U_2(n^I,c^I).$$

Ligesaa er, naar W^I betegner hvad W bliver ved for n og c at sætte n^I og c^I, altsaa for n^I og c^I at sætte n^{II} og c^{II},

$$U_2(n^I,c^I) = W^I - \frac{1}{c^I} U_1(n^I,c^I) + \frac{1}{c^I(1+c^I)} U_2(n^{II},c^{II})$$

$$= W^I + \frac{2(1+c)}{c^I} \log\left(1-\frac{n}{c}\right) F^I(c) - \frac{2(1+c)}{c^I} U_1(n,c) + \frac{1}{c^I(1+c^I)} U_2(n^{II},c^{II}).$$

Elimineres $U_1(n,c)$ mellem denne Ligning og den foregaaende, erholdes

$$U_2(n,c) = W - \frac{c^I}{2c(1+c)} W^I - \frac{\log\left(1-\frac{n}{c}\right)}{c} F^I(c) + \frac{2+c^I}{2c(1+c)} U_2(n^I,c^I) - \frac{U_2(n^{II},c^{II})}{2c(1+c)(1+c^I)} \tag{19}$$

som er den Relation, der finder Sted mellem de tre consecutive Functioner $U_2(n,c)$, $U_2(n^I,c^I)$, $U_2(n^{II},c^{II})$, ligesom Formlen (6) fremstiller den analoge mellem $U_1(n,c)$, $U_1(n^I,c^I)$, $U_1(n^{II},c^{II})$.

Formlen (18) kan paa samme Maade som (5) tjene til Approximation, idet $U_2(n,c)$ reduceres til $U_2(n^{o(p)},c^{o(p)})$, hvor $n^{o(p)}$ og $c^{o(p)}$ kunne blive ligesaa smaae som man vil, hvorhos det er af Vigtighed at kjende Værdien af $U_2(n,o)$, som erholdes ifölge

$$\frac{dU_2(n,o)}{dn} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{1+n\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2n^2\sqrt{1+n}} + \frac{n-2}{4n^2}\pi,$$

idet $\int \frac{\sin^4\varphi \, d\varphi}{1+n\sin^2\varphi} = \frac{\mathrm{arc}(\mathrm{tg} = \mathrm{tg}\varphi . \sqrt{1+n})}{n^2\sqrt{1+n}} + \frac{n-2}{2n^2}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4n}$, altsaa

$$U_2(n,o) = \pi \int_0^n dn \left(\frac{1}{2n^2\sqrt{1+n}} + \frac{n-2}{4n^2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\log \frac{\sqrt{1+n}+1}{2} - \frac{\sqrt{1+n}-1}{n} + \tfrac{1}{2}\right), \tag{20}$$

som, naar n er uendelig lille, giver $U_2(n,o) = \frac{3\pi}{16} n$, som er tre Fjerdedele af hvad $U_1(n,o)$ er i det samme Tilfælde.

6. Naar i det indefinite Integral

$$U^2(n,c,\theta) = \int_0^\theta \log(1+n\sin^2\varphi) . \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}$$

$\log(1+n\sin^2\varphi)$ bliver udviklet efter stigende Potenser af $n\sin^2\varphi$ og hvert enkelt Led transformeret ifölge (9), dernæst Rækken summeret under Integraltegnet, erholdes

$$U^2(n,c,\theta) = \frac{1}{\pi c}\int_0^\pi \frac{\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}\right)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\left[\tfrac{1}{2}\cos\varphi \log\left(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi\right) - \sin\varphi . \mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{n\sin\varphi}{c+n\cos\varphi}\right)\right. \tag{21}$$

hvorunder (17) er indbefattet ved at sætte $\theta = \frac{\pi}{2}$. Differentieres denne Formel under Integraltegnet med Hensyn til θ, vil man komme til en Transformation analog med den, som forhen er funden for Formlen (10), men som vi ikke behöve her nærmere at udvikle.

7. Den complette Function af tredie Art være betegnet ved R_1, nemlig

$$R_I(r,n,c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+n\sin^2\varphi)}{1+r\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}. \qquad (22)$$

Udviklingen af $\frac{\log(1+n\sin^2\varphi)}{1+r\sin^2\varphi}$ efter stigende Potenser af $\sin^2\phi$ være fremstillet ved

$$\frac{\log(1+n\sin^2\phi)}{1+r\sin^2\phi} = A_I\sin^2\phi + A_2\sin^4\phi + A_3\sin^6\phi + \&c. \qquad (23)$$

Altsaa er ifölge (2)

$$2R^1(r,n,c) = \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}} \left[\frac{A_I}{c}\cos\phi + \frac{A_2}{c^2}\cos 2\phi + \frac{A_3}{c^3}\cos 3\varphi + \&c.\right]. \qquad (24)$$

For at summere Rækken, som findes under dette Integraltegn, indsættes i (23) istedetfor $\sin^2\phi$ successive $\frac{1}{c}e^{\varphi\sqrt{-1}}$ og $\frac{1}{c}e^{-\varphi\sqrt{-1}}$, hvorefter Resultaterne adderes, hvilket giver

$$\frac{\log(1+\frac{n}{c}e^{\varphi\sqrt{-1}})}{1+\frac{r}{c}e^{\varphi\sqrt{-1}}} + \frac{\log(1+\frac{n}{c}e^{-\varphi\sqrt{-1}})}{1+\frac{r}{c}e^{-\varphi\sqrt{-1}}} = 2\left[\frac{A_I}{c}\cos\phi + \frac{A_2}{c^2}\cos 2\phi + \frac{A_3}{c^3}\cos 3\varphi + \&c.\right]$$

eller, ved at reducere venstre Side af denne Ligning til reel Form,

$$\frac{\frac{1}{2}(1+\frac{r}{c}\cos\varphi)\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\phi) + \frac{r}{c}\sin\phi.\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = \frac{n\sin\phi}{c+n\cos\phi})}{1+\frac{r^2}{c^2}+2\frac{r}{c}\cos\varphi} = \frac{A_I}{c}\cos\varphi + \frac{A_2}{c^2}\cos 2\varphi + \frac{A_3}{c^3}\cos 3\varphi + \&c.$$

Dette indsat i (24) giver

$$4R_I(r,n,c) = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}} \cdot \frac{(1+\frac{r}{c}\cos\varphi)\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi) + \frac{2r}{c}\sin\varphi.\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{n\sin\varphi}{c+n\cos\phi}\right)}{1+\frac{r^2}{c^2}+2\frac{r}{c}\cos\varphi} \qquad (25)$$

hvorunder (3) er indbefattet ved at sætte $r = o$. Vi sætte for Kortheds Skyld

$$V = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}} \cdot \frac{(1+\frac{r}{c}\cos\varphi)\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi)}{1+\frac{r^2}{c^2}+2\frac{r}{c}\cos\varphi}$$

$$Y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}} \cdot \frac{\frac{2r}{c}\sin\varphi.\ \mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{n\sin\varphi}{c+n\cos\varphi}\right)}{1+\frac{r^2}{c^2}+2\frac{r^2}{c^2}\cos\varphi}$$

og vi betegne ved V_1 og Y_1 de samme Integraler tagne mellem Grændserne o og π, saa at

$$4\,R_1(r,n,c) = V_1 + Y_1.$$

Man har

$$V = \frac{1}{2}\int \frac{\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}d\varphi + \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{r^2}{c^2}\right)\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}} \cdot \frac{\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi)}{1+\frac{r^2}{c^2}+2\frac{r}{c}\cos\varphi}$$

altsaa ved heri at indsætte

$$\log(1+\frac{n^2}{c^2}+2\frac{n}{c}\cos\varphi) = 2\log(1-\frac{n}{c}) + \log(1+n^{\mathrm{I}}\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi} = (1+c)\sqrt{1-c_{\mathrm{I}}{}^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi}$$

$$1+\frac{r^2}{c^2}+2\frac{r}{c}\cos\varphi = \left(1-\frac{r}{c}\right)^2(1+r^{\mathrm{I}}\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi)$$

idet $r^{\mathrm{I}} = \frac{4rc}{(c-r)^2}$, og ved at sætte $\varphi = \pi - 2\psi$, erholdes

$$V_1 = 2\,U_1(n,c) + \frac{c+r}{c-r}\cdot\frac{1}{1+c}\left[2\log(1-\frac{n}{c})\ \Pi^{\mathrm{I}}(r^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}}) + R_1(r^{\mathrm{I}},n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}})\right].$$

Herved maa mærkes det specielle Tilfælde $r = c$, som giver umiddelbart ifölge (3) $V_1 = U_1(n,c) + \frac{\pi}{1+c}\log(1-\frac{n}{c})$ hvor det andet Led er det singulære Integral fra $\varphi = \pi - \varepsilon$ til $\varphi = \pi$. Ligesaa, naar $r = -c$, er $V_1 = 2\,U_1(n,c) + \frac{\pi}{1-c}\log(1+\frac{n}{c})$ hvor det andet Led er det singulære Integral fra o til ε. Er derimod $n = c$ haves

$$V_1 = 2\,U_1(c,c) + \frac{c+r}{c-r}\cdot\frac{2}{1+c}\left[\log 2.\,\Pi^1(r^1,c^1) + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin\psi}{1+r^1\sin^2\psi}\cdot\frac{d\psi}{\Delta(c^1\psi)}\right],$$

og naar $r = n = c$ haves V_1 uendelig.

Udtrykket for Y giver

$$\frac{dY}{dn} = 2r\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{(1+\frac{r^2}{c^2}+2\frac{r}{c}\cos\varphi)(c^2+n^2+2nc\cos\varphi)},$$

altsaa, idet $\sin^2\varphi = 4\cos^2\frac{1}{2}\varphi.\,(1-\cos^2\frac{1}{2}\varphi)$, $r^1 = \frac{4rc}{(c-r)^2}$, $n^1 = \frac{4nc}{(c-n)^2}$, ved at sætte $\varphi = \pi - 2\psi$ erholdes

$$\frac{dY_1}{dn} = \frac{16r}{(1-\frac{r}{c})^2(c-n)^2(1+c)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\Delta(c^1,\psi)}\cdot\frac{\sin^2\psi - \sin^4\psi}{(1+r^1\sin^2\psi)(1+n^1\sin^2\psi)},$$

altsaa

$$\frac{dY_1}{dn}dn = \frac{16r\,dn}{(1-\frac{r}{c})^2(c-n)^2}\left[-\frac{1}{r^1n^1}F^1(c) + \frac{1+r^1}{(1+c)r^1(n^1-r^1)}\Pi^1(r^1,c^1) + \frac{1+n^1}{(1+c)n^1(r^1-n^1)}\Pi^1(n^1,c^1)\right].$$

Ifölge Relationen mellem n og n^1 er

$$\frac{4\,dn}{(c-n)^2} = \frac{dn^1}{c\sqrt{1+n^1}};$$

tilmed forsvinde disse Störrelser samtidigen, altsaa erholdes

$$Y_{\mathrm{I}} = \int_0^{n^{\mathrm{I}}} \frac{dn^{\mathrm{I}}}{\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}}\left[-\frac{1}{n^{\mathrm{I}}}F^{\mathrm{I}}(c)+\frac{1+r^{\mathrm{I}}}{(1+c)(n^{\mathrm{I}}-r^{\mathrm{I}})}\Pi^{\mathrm{I}}(r^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}})+\frac{(1+n^{\mathrm{I}})r^{\mathrm{I}}}{(1+c)n^{\mathrm{I}}(r^{\mathrm{I}}-n^{\mathrm{I}})}\Pi^{\mathrm{I}}(n^{\mathrm{I}},c^{\mathrm{I}})\right].$$

Man har

$$\int\frac{dn^{\mathrm{I}}}{\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}.\,n^{\mathrm{I}}} = \log\frac{\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}-1}{\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}+1};\quad \int \frac{dn^{\mathrm{I}}}{\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}(n^{\mathrm{I}}-r^{\mathrm{I}})} = \frac{1}{\sqrt{1+r^{\mathrm{I}}}}\log\frac{\sqrt{1+r^{\mathrm{I}}}-\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}}{\sqrt{1+r^{\mathrm{I}}}+\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}};$$

$$\int\frac{(1+n^{\mathrm{I}})\,dn^{\mathrm{I}}}{\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}\,n^{\mathrm{I}}(r^{\mathrm{I}}-n^{\mathrm{I}})(1+n^{\mathrm{I}}\sin^2\psi)} = \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{r^{\mathrm{I}}}\log\frac{\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}-1}{\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}+1}-\frac{\sqrt{1+r^{\mathrm{I}}}}{r^{\mathrm{I}}(1+r^{\mathrm{I}}\sin^2\psi)}\log\frac{\sqrt{1+r^{\mathrm{I}}}-\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}}{\sqrt{1+r^{\mathrm{I}}}+\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}}\\ &+\frac{2\sin\psi\cos\psi}{1+r^{\mathrm{I}}\sin^2\psi}\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\operatorname{tg}\psi.\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}})\end{aligned}\right.$$

fölgelig

$$\frac{1+c}{r^{\mathrm{I}}}.\,Y = \gamma + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\psi.\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\operatorname{tg}\psi.\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}})}{1+r^{\mathrm{I}}\sin^2\psi}.\,\frac{d\psi}{\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}$$

hvor γ maa bestemmes saaledes at $Y_{\mathrm{I}} = 0$ naar $n^{\mathrm{I}} = 0$, altsaa

$$\gamma = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\psi.\sin 2\psi}{1+r^{\mathrm{I}}\sin^2\psi}.\,\frac{d\psi}{\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}.$$

Altsaa er

$$Y_{\mathrm{I}} = \frac{r^{\mathrm{I}}}{1+c}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\psi.\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\operatorname{tg}\psi.\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}})}{1+r^{\mathrm{I}}\sin^2\psi}.\,\frac{d\psi}{\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\psi.\sin 2\psi}{1+r^{\mathrm{I}}\sin^2\psi}.\,\frac{d\psi}{\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}\right]$$

som ogsaa af det oprindelige Udtryk for Y_{I} erholdes ved at sætte $\phi = \pi - 2\psi$, naar man derhos bemærker, at

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\operatorname{tg}\psi.\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}})-\psi = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{n\sin 2\psi}{c-n\cos 2\psi}\right).$$

Man har

$$\int \frac{\sin 2\psi .\, d\psi}{(1+r^{\mathrm{I}}\sin^2\psi)\,\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)} = \frac{1}{r^{\mathrm{I}}\sqrt{1+\frac{c^{\mathrm{I}\,2}}{r^{\mathrm{I}}}}} \log \frac{\sqrt{1+\frac{c^{\mathrm{I}\,2}}{r^{\mathrm{I}}}} - \Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}{\sqrt{1+\frac{c^{\mathrm{I}\,2}}{r^{\mathrm{I}}}} + \Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}$$

altsaa ved deleviis Integration

$$Y_{\mathrm{I}} = \frac{1}{(1+c)\sqrt{1+\frac{c^{\mathrm{I}\,2}}{r^{\mathrm{I}}}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sqrt{1+\frac{c^{\mathrm{I}\,2}}{r^{\mathrm{I}}}} - \Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}{\sqrt{1+\frac{c^{\mathrm{I}\,2}}{r^{\mathrm{I}}}} + \Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)} \left[d\psi - \frac{d\psi .\, \sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}}{1+n^{\mathrm{I}}\sin^2\psi}\right].$$

Antages r^{I} at være positiv, sættes

$$\frac{\Delta(c^{\mathrm{I}},\psi)}{\sqrt{1+\frac{c^{\mathrm{I}\,2}}{r^{\mathrm{I}}}}} = \sin\omega, \quad \frac{b^{\mathrm{I}}}{\sqrt{1+\frac{c^{\mathrm{I}\,2}}{r^{\mathrm{I}}}}} = \sin\alpha, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^{\mathrm{I}\,2}}{r^{\mathrm{I}}}}} = \sin\beta,$$

som giver

$$Y_{\mathrm{I}} = \frac{\sin\beta}{1+c} \int_\alpha^\beta \log \frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega} . \frac{\sin\omega\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha}\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega}} \left[\frac{c^{\mathrm{I}\,2}\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}}{c^{\mathrm{I}\,2}+n^{\mathrm{I}}(1-\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\beta})} - 1\right].$$

Ved dernæst at sætte $\frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega} = u$, altsaa $\frac{u-1}{u+1} = \sin\omega$, $\sin\omega\cos\omega\, d\omega = \frac{2(u-1)}{(u+1)^3} du$,

haves

$$Y_{\mathrm{I}} = \frac{2\sin\beta}{1+c} \int \log u . \frac{\frac{u-1}{u+1} du \left[\frac{c^{\mathrm{I}\,2}\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}}{c^{\mathrm{I}\,2}+n^{\mathrm{I}}\left[1-\frac{1}{\sin^2\beta}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2\right]} - 1\right]}{\sqrt{[(u-1)-(u+1)\sin\alpha][(u-1)+(u+1)\sin\alpha][(u+1)\sin\beta-(u-1)][(u+1)\sin\beta+(u-1)]}}$$

idet Grændserne ere $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$, $\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}$. De fire Factorer under Qvadratrodstegnet ere bestandig positive mellem disse Grændser, og den förste er 0 ved den lavere, den tredie ved den höiere Grændse. Det vil derfor være beqvemt ved en ny Substitution at sætte en af disse sidste $= x^2$ f. Ex.

$$u - 1 - (u+1)\sin\alpha = x^2$$

eller $u = \dfrac{x^2+1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$, altsaa $u - 1 = \dfrac{x^2+2\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$, $u+1 = \dfrac{x^2+2}{1-\sin\alpha}$, $du = \dfrac{2x\,dx}{1-\sin\alpha}$. Dette giver

$$Y_{\mathrm{I}} = \frac{4\sin\beta.\sqrt{1-\sin\alpha}}{1+c}\int \log\frac{x^2+1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}.\frac{dx\left[\dfrac{c_{\mathrm{I}}^2\sqrt{1+n^{\mathrm{I}}}(x^2+2)(x^2+2\sin\alpha)}{(c_{\mathrm{I}}^2+n^{\mathrm{I}})(x^2+2)^2-\dfrac{n^{\mathrm{I}}}{\sin^2\beta}(x^2+2\sin\alpha)^2}-\dfrac{x^2+2\sin\alpha}{x^2+2}\right]}{\sqrt{[(1+\sin\alpha)x^2+4\sin\alpha][2(\sin\beta-\sin\alpha)-(1-\sin\beta)x^2][(1+\sin\beta)x^2+2(\sin\beta+\sin\alpha)]}},$$

som maa behandles paa den Maade, som *Legendre* har anviist for de analoge Former, der ere reductible til elliptiske Functioner (*Traité des fonctions elliptiques* T. I. Pag. 263 Cas V.). Man har

$$\frac{2(\sin\beta+\sin\alpha)}{1+\sin\beta} > \frac{4\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

thi Differentsen

$$\frac{2(\sin\beta+\sin\alpha)}{1+\sin\beta} - \frac{4\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{2(\sin\beta-\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{(1+\sin\beta)(1+\sin\alpha)}$$

er positiv. Altsaa de tre Störrelser

$$\frac{2(\sin\beta-\sin\alpha)}{1-\sin\beta}, \quad \frac{4\sin\alpha}{1+\sin\alpha}, \quad \frac{2(\sin\beta+\sin\alpha)}{1+\sin\beta}$$

ere de, som maae sættes istedetfor α^2, β^2, γ^2 hos *Legendre*, idet ved ny Substitution sættes

$$x^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 \sin^2\varphi}{\beta^2 + \alpha^2 \cos^2\varphi}$$

hvorved Grændserne, som med Hensyn til x vare $x = 0$, $x = \alpha$, blive $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, og man erholder

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2-x^2)(x^2+\beta^2)(x^2+\gamma^2)}} = \frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta(c_I,\varphi)}$$

hvor Modulus $c_I^2 = \frac{\alpha^2(\gamma^2-\beta^2)}{\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)} = \left(\frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\sin\beta + \sin\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1-b^I}{1+b^I}\right)^2 = c^2$. Tilmed er $\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{2(\sin\beta+\sin\alpha)}{\cos\beta}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, altsaa bliver

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2-x^2)(x^2+\beta^2)(x^2+\gamma^2)}} = \frac{\cos\beta}{2(\sin\beta+\sin\alpha)}\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}.$$

Indsættes dette i det sidste Udtryk for Y_1 og reduceres den constante Factor ifölge Betydningen af $\sin\alpha$ og $\sin\beta$, erholdes

$$Y_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} \log\frac{x^2+1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \cdot \left[\frac{c_I^2\sqrt{1+n^I}\,(x^2+2)(x^2+2\sin\alpha)}{(c_I^2+n^I)(x^2+2)^2 - \frac{n^I}{\sin^2\beta}(x^2+2\sin\alpha)^2} - \frac{x^2+2\sin\alpha}{x^2+2}\right].$$

Man finder

$$\frac{x^2+1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{(\sin\beta+\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-(\sin\beta-\sin\alpha)(1-\sin\alpha)\sin^2\varphi}{(\sin\beta+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)-(\sin\beta-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)\sin^2\varphi} = \frac{1-cr_I\sin^2\varphi}{r_I\left(1-\frac{c}{r_I}\sin^2\varphi\right)}$$

idet $r_I = \frac{\sqrt{1+\frac{c_I^2}{r^I}} - b^I}{\sqrt{1+\frac{c_I^2}{r^I}} + b^I} = \frac{\sqrt{(1+r)(1+\frac{c^2}{r})} - (1-c)}{\sqrt{(1+r)(1+\frac{c^2}{r})} + (1-c)}$. Fremdeles er

$$x^2+2 = \frac{2(1-c\sin^2\varphi)}{1-\frac{c}{r_I}\sin^2\varphi},\quad x^2+2\sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \frac{1+c\sin^2\varphi}{1-\frac{c}{r_I}\sin^2\varphi},$$

altsaa

$$\frac{c_1^2\sqrt{1+n_1}(x^2+2)(x^2+2\sin\alpha)}{(c_1^2+n_1)(x^2+2)^2-\frac{n_1}{\sin^2\beta}(x^2+2\sin\alpha)^2}-\frac{x^2+2\sin\alpha}{x^2+2}=\sin\alpha\left[\frac{c_1^2\sqrt{1+n_1}\,(1-c^2\sin^4\varphi)}{(c_1^2+n_1)(1-c\sin^2\varphi)^2-b_1^2n_1(1+c\sin^2\varphi)^2}-\frac{1+c\sin^2\varphi}{1-c\sin^2\varphi}\right]$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+n_1}}\left[-1+\frac{1}{1-c\,n_1\sin^2\varphi}+\frac{1}{1-\frac{c}{n_1}\sin^2\varphi}\right]-\sin\alpha.\ \frac{1+c\sin^2\varphi}{1-c\sin^2\varphi},\text{ idet}$$

$$n_1=\frac{\sqrt{1+\frac{c_1^2}{n_1}-b_1}}{\sqrt{1+\frac{c_1^2}{n_1}+b_1}}=\frac{\sqrt{(1+n)(1+\frac{c^2}{n})-(1-c)}}{\sqrt{(1+n)(1+\frac{c^2}{n})+(1-c)}}.$$

Tilmed er $-\frac{1+c\sin^2\varphi}{1-c\sin^2\varphi}=1-\frac{2}{1-c\sin^2\varphi}$, altsaa haves

$$Y_1=\frac{\sin\alpha}{c+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}\log\frac{1-cr_1\sin^2\varphi}{r_1(1-\frac{c}{r_1}\sin^2\varphi)}.\left[2n+\frac{c-n}{1-cn_1\sin^2\varphi}+\frac{c-n}{1-\frac{c}{n_1}\sin^2\varphi}-\frac{2(c+n)}{1-c\sin^2\varphi}\right]$$

eller

$$Y_1 = \frac{1-c}{(c+n)\sqrt{(1+r)(1+\frac{c^2}{r})}}\left\{\begin{array}{l} 2n\left[U_1(-cr_1)-U_1(-\frac{c}{r_1})-\log r_1 . F^1(c)\right] \\ +(c-n)\left\{\begin{array}{l} R_1(-cn_1,-cr_1)+R_1(-\frac{c}{n_1},-cr_1)-R_1(-cn_1,-\frac{c}{r_1}) \\ -R_1(-\frac{c}{n_1},-\frac{c}{r_1})-\log r_1 . \left[\Pi^1(-cn_1)+\Pi_1(-\frac{c}{n_1})\right] \end{array}\right. \\ -2(c+n)\left[R_1(-c,-cr_1)-R_1(-c,-\frac{c}{r_1})-\log r_1 . \Pi^1(-c)\right] \end{array}\right.$$

idet c er fælleds Modulus for alle Functionerne.
De complette elliptiske Functioner af tredie Art, som heri indgaae, reduceres til den complette af förste Art ifölge:

$$\Pi^1(-cn_1)+\Pi^1(-\frac{c}{n_1}) = F^1(c)+\frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{(1-cn_1)(1-\frac{c}{n_1})}} = F^1(c)+\frac{c+n}{(1-c)(c-n)}.\frac{\pi}{2},$$

$$\Pi^1(-c) = \frac{1}{2}F^1(c)+\frac{\pi}{4(1-c)}.$$

Altsaa er

$$Y_1 = \frac{1-c}{(c+n)\sqrt{(1+r)(1+\frac{c^2}{r})}}\left\{\begin{array}{l} 2n\left[U_1(-cr_1)-U_1(-\frac{c}{r_1})\right] \\ +(c-n)\left\{\begin{array}{l} R_1(-cn_1,-cr_1)+R_1(-\frac{c}{n_1},-cr_1) \\ -R_1(-cn_1,-\frac{c}{r_1})-R_1(-\frac{c}{n_1},-\frac{c}{r_1}) \end{array}\right. \\ -2(c+n)\left[R_1(-c,-cr_1)-R_1(-c,-\frac{c}{r_1})\right] \end{array}\right.$$

Man har

$$\frac{dU_1(-cr_1)}{dr_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-c\sin^2\varphi}{1-cr_1\sin^2\varphi}.\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} = \frac{1}{r_1}\left[F^1(c)-\Pi^1(-cr_1)\right]$$

$$\frac{dU_1(-\frac{c}{r_1})}{dr_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{c\sin^2\varphi}{r_1^2}}{1-\frac{c}{r_1}\sin^2\varphi}.\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} = -\frac{1}{r_1}\left[F^1(c)-\Pi^1(-\frac{c}{r_1})\right]$$

fölgelig

$$\frac{dU_1(-cr_1)}{dr_1}-\frac{dU_1(-\frac{c}{r_1})}{dr_1}=\frac{2}{r_1}F^1(c)-\frac{1}{r_1}\left[\Pi^1(-cr_1)+\Pi^1(-\frac{c}{r_1})\right]$$
$$=\frac{1}{r_1}F^1(c)-\frac{\frac{1}{2}\pi}{r_1\sqrt{(1-cr_1)(1-\frac{c}{r_1})}},$$

og ved at integrere fra 1 til r_1

$$U_1(-cr_1)-U_1(-\frac{c}{r_1})=\log r_1 .\ F^1(c)+\tfrac{1}{2}\pi\int_{r_1}^{1}\frac{dr_1}{r_1\sqrt{(-cr_1)(1-\frac{c}{r_1})}}.$$

Det er herved at bemærke, at r_1 er <1 ifölge dens Udtryk, og $r_1 > c$ efterdi

$$(1-cr_1)(1-\frac{c}{r_1})=(1-c)^2\left(\frac{c-r}{c+r}\right)^2$$

er positivt. Ved at sætte $cr_1=u^2=\frac{c^2}{1-b^2\sin^2\varphi}$ eller $\sin\varphi=\frac{1}{b}\sqrt{1-\frac{c}{r_1}}$, erholdes

$$\int\frac{dr_1}{r_1\sqrt{(1-cr_1)(1-\frac{c}{r_1})}}=2\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(u^2-c^2)}}=2\int\frac{d\varphi}{\Delta(b,\varphi)},$$

altsaa

$$\int_{r_1}^{1}\frac{dr_1}{r_1\sqrt{(1-cr_1)(1-\frac{c}{r_1})}}=\int_{c}^{1}\frac{dr_1}{r_1\sqrt{(1-cr_1)(1-\frac{c}{r_1})}}-\int_{c}^{r_1}\frac{dr_1}{r_1\sqrt{(1-cr_1)(1-\frac{c}{r_1})}}=2\left[F(b,\psi)-F(b,\varphi)\right],$$

idet $\sin^2\psi=\frac{1}{1+c}$, som giver $F(b,\psi)=\frac{1}{2}F^1(b)$. Fölgelig er

$$U_1(-cr_1)-U_1\left(-\frac{c}{r_1}\right)=\log r_1 .\ F^1(c)+\pi\left[\frac{1}{2}F^1(b)-F(b,\varphi)\right],$$

idet $\sin\varphi=\frac{1}{b}\sqrt{1-\frac{c}{r_1}}$.

Fremdeles er

$$\frac{dR_I(-cn_I,-cr_I)}{dr_I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-c\sin^2\phi}{(1-cn_I\sin^2\varphi)(1-cr_I\sin^2\varphi)}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}=\frac{1}{r_I-n_I}[\Pi^I(-cn_I)-\Pi^I(-cr_I)]$$

$$\frac{dR_I(-cn_I,-\frac{c}{r_I})}{dr_I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{c\sin^2\phi}{r_I^2}}{(1-cn_I\sin^2\varphi)(1-\frac{c}{r_I}\sin^2\varphi)}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}=\frac{1}{r_In_I\left(r_I-\frac{1}{n_I}\right)}[\Pi^I(-cn_I)-\Pi^I(-\frac{c}{r_I})]$$

altsaa, ifölge Relationen mellem $\Pi^I(-cr_I)$ og $\Pi^I(-\frac{c}{r_I})$,

$$\frac{dR_I(-cn_I,-cr_I)}{dr_I}-\frac{dR_I(-cn_I,-\frac{c}{r_I})}{dr_I}=\begin{cases}\left[\frac{1}{r_I}+\frac{1}{r_I-n_I}-\frac{1}{r_I-\frac{1}{n_I}}\right]\Pi^I(-cn_I)\\ +\left[-\frac{1}{r_I}+\frac{1}{r_I-\frac{1}{n_I}}\right]\left[F^I(c)+\frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{(1-cr_I)(1-\frac{c}{r_I})}}\right]\\ -\left[-\frac{1}{r_I}+\frac{1}{r_I-n_I}+\frac{1}{r_I-\frac{1}{n_I}}\right]\Pi^I(-cr_I).\end{cases}$$

Sættes som ovenfor $cr_I=\frac{c^2}{1-b^2\sin^2\varphi}$, bliver

$$\int\frac{dr_I}{(r_I-\frac{1}{n_I})\sqrt{(1-cr_I)(1-\frac{c}{r_I})}}=-\frac{2cn_I}{1-cn_I}\int\frac{1}{1-\frac{b^2}{1-cn_I}\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\phi}{\Delta(b,\phi)},$$

fölgelig

$$\int_{r_I}^1\frac{dr_I}{(r_I-\frac{1}{n_I})\sqrt{(1-cr_I)(1-\frac{c}{r_I})}}=-\frac{2cn_I}{1-cn_I}[\Pi(p,b,\psi)-\Pi(p,b,\varphi)]$$

idet $p=-\frac{b^2}{1-cn_I}$, $\sin^2\psi=\frac{1}{1+c}$, $\sin\phi=\frac{1}{b}\sqrt{1-\frac{c}{r_I}}$. For at finde Integralet af de Led, som indeholde $\Pi^I(-cr_I)$, bemærkes fölgende Decompositioner

$$\frac{1}{r_{\mathrm{I}}(1-cr_{\mathrm{I}}\sin^2\varphi)}=\frac{1}{r_{\mathrm{I}}}+\frac{c\sin^2\varphi}{1-cr_{\mathrm{I}}\sin^2\varphi}$$

$$\frac{1}{(r_{\mathrm{I}}-n_{\mathrm{I}})(1-cr_{\mathrm{I}}\sin^2\varphi)}=\frac{1}{1-cn_{\mathrm{I}}\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{r_{\mathrm{I}}-n_{\mathrm{I}}}+\frac{c\sin^2\varphi}{1-cn_{\mathrm{I}}\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{1-cr_{\mathrm{I}}\sin^2\varphi}$$

$$\frac{1}{(r_{\mathrm{I}}-\frac{1}{n_{\mathrm{I}}})(1-cr_{\mathrm{I}}\sin^2\varphi)}=\frac{1}{1-\frac{c}{n_{\mathrm{I}}}\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{r_{\mathrm{I}}-\frac{1}{n_{\mathrm{I}}}}+\frac{c\sin^2\varphi}{1-\frac{c}{n_{\mathrm{I}}}\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{1-cr_{\mathrm{I}}\sin^2\varphi}.$$

Altsaa er

$$\int_{r_{\mathrm{I}}}^{1}\left(-\frac{1}{r_{\mathrm{I}}}+\frac{1}{r_{\mathrm{I}}-n_{\mathrm{I}}}+\frac{1}{r_{\mathrm{I}}-\frac{1}{n_{\mathrm{I}}}}\right)\Pi^{\mathrm{I}}(-cr_{\mathrm{I}})dr_{\mathrm{I}}=\begin{cases}\log r_{\mathrm{I}}\cdot F^{\mathrm{I}}(c)+\log\frac{1-n_{\mathrm{I}}}{r_{\mathrm{I}}-n_{\mathrm{I}}}\cdot\Pi^{\mathrm{I}}(-cn_{\mathrm{I}})+\log\frac{1-\frac{1}{n_{\mathrm{I}}}}{r_{\mathrm{I}}-\frac{1}{n_{\mathrm{I}}}}\cdot\Pi^{\mathrm{I}}(-\frac{c}{n_{\mathrm{I}}})\\ -U_{\mathrm{I}}(-cr_{\mathrm{I}})+R_{\mathrm{I}}(-cn_{\mathrm{I}},-cr_{\mathrm{I}})+R_{\mathrm{I}}(-\frac{c}{n_{\mathrm{I}}},-cr_{\mathrm{I}})\\ +U_{\mathrm{I}}(-c)-R_{\mathrm{I}}(-cn_{\mathrm{I}},-c)-R_{\mathrm{I}}(-\frac{c}{n_{\mathrm{I}}},-c)\end{cases}$$

Samles alle Integralerne og bemærkes Relationen mellem $\Pi^{\mathrm{I}}(-cn_{\mathrm{I}})$ og $\Pi^{\mathrm{I}}(-\frac{c}{n_{\mathrm{I}}})$, erholdes

$$R_I(-cn_I,-cr_I)-R_I\left(-cn_I,-\frac{c}{r_I}\right)=\left\{\begin{array}{l}\log r_I.\Pi^I(-cn_I)+\log\dfrac{1-\dfrac{1}{n_I}}{r_I-\dfrac{1}{n_I}}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{(1-cn_I)\left(1-\dfrac{c}{n_I}\right)}}+\pi\left[\tfrac{1}{2}F^I(b)-F(b,\varphi)\right]\\[2ex] +\dfrac{\pi c\, n_I}{1-cn_I}\left[\Pi(p,b,\psi)-\Pi(p,b,\varphi)\right]-U_I(-cr_I)+U_I(-c)\\[2ex] +R_I(-cn_I,-cr_I)+R_I\left(-\dfrac{c}{n_I},-cr_I\right)-R_I(-cn_I,-c)-R_I\left(-\dfrac{n'}{n_I},-c\right)\end{array}\right.$$

altsaa er ogsaa ved at forandre n_I til $\frac{1}{n_I}$

$$R_I\left(-\frac{c}{n_I},-cr_I\right)-R_I\left(-\frac{c}{n_I},-\frac{c}{r_I}\right)=\left\{\begin{array}{l}\log r_I.\Pi^I\left(-\dfrac{c}{n_I}\right)+\log\dfrac{1-n_I}{r_I-n_I}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{(1-cn_I)\left(1-\dfrac{c}{n_I}\right)}}+\pi\left[\tfrac{1}{2}F^I(b)-F(b,\varphi)\right]\\[2ex] +\dfrac{\pi c}{n_I-c}\left[\Pi(q,b,\psi)-\Pi(q,b,\varphi)\right]-U_I(-cr_I)+U_I(-c)\\[2ex] +R_I(-cn_I,-cr_I)+R_I\left(-\dfrac{c}{n_I},-cr_I\right)-R_I(-cn_I,-c)-R_I\left(-\dfrac{c}{n_I},-c\right)\end{array}\right.$$

idet $q = -\frac{b^2 n_1}{n_1 - c}$. Differentsen af disse Udtryk er alene afhængig af elliptiske Functioner, men det er deres Sum, som indgaaer i Y_1. Ved Additionen ville de elliptiske Functioner af tredie Art reduceres til förste Art. Man har nemlig

$$(1+p)(1+q)=c^2, \frac{cn_1}{1-cn_1}=\frac{1+p}{p}\cdot\frac{b^2 n_1}{(1-cn_1)(n_1-c)}, \frac{c}{n_1-c}=\frac{1+q}{q}\cdot\frac{b^2 n_1}{(1-cn_1)(n_1-c)};$$

tilmed er n_1 ligesom r_1 indsluttet mellem c og 1, fölgelig p og q logarithmiske Parametre, den förste varierende fra -1 til $-(1+c)$, den anden fra $-\infty$ til $-(1+c)$ medens n_1 varierer fta c til 1. Fölgelig er (*Traité des fonctions elliptiques* T. I. Pag. 72)

$$\frac{cn_1}{1-cn_1}\Pi(p,b,\varphi)+\frac{c}{n_1-c}\Pi(q,b,\varphi)=\frac{b^2 n_1}{(1-cn_1)(n_1-c)}\left[-\frac{b^2}{pq}F(b,\varphi)+\frac{1}{2\sqrt{pq}}\log\frac{\Delta(b,\varphi)+\sqrt{pq}\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(b,\varphi)-\sqrt{pq}\sin\varphi\cos\varphi}\right],$$

og paa lignende Maade reduceres de Led, som indeholde ψ. Bemærkes nu Værdierne af p og q, samt de af φ og ψ givne ved $\sin^2\psi=\frac{1}{1+c}$, hvorved $F(b,\psi)=\frac{1}{2}F^1(b)$, og $\sin\varphi=\frac{1}{b}\sqrt{1-\frac{c}{r_1}}$,

erholdes:

$$R_1(-cn_1,-cr_1)+R_1\left(-\frac{c}{n_1},-cr_1\right)-R_1\left(-cn_1,-\frac{c}{r_1}\right)-R_1\left(-\frac{c}{n_1},-\frac{c}{r_1}\right)=$$

$$\left\{\begin{array}{l}\log r_1\cdot F^1(c)+\frac{\pi}{2(1-c)}\cdot\frac{c+n}{c-n}\log\left[\frac{r_1(1-n_1)\left(1-\frac{1}{n_1}\right)}{(r_1-n_1)\left(r_1-\frac{1}{n_1}\right)}\cdot\frac{c^2(r-n)}{n(rn-c^2)}\right]+\pi\left[\frac{1}{2}F^1(b)-F(b,\varphi)\right]\\ -2U_1(-cr_1)+2U_1(-c)+2\left[R_1(-cn_1,-cr_1)+R_1\left(-\frac{c}{n_1},-cr_1\right)-R_1(-cn_1,-c)-R_1\left(-\frac{c}{n_1},-c\right)\right]\end{array}\right.$$

som er al den Reduction man kan opnaae.

Af Formlen $\sqrt{(1-cn_1)\left(1-\frac{c}{n_1}\right)} = (1-c)\frac{c-n}{c+n}$ sees at $n_1 = 1$ giver $n = o$, hvorved

$$\frac{(1-n_1)\left(1-\frac{1}{n_1}\right)}{n}$$

bliver ubestemt, men tillige haves

$$\frac{n}{c} = \frac{1-c-\sqrt{(1-cn_1)(1-\frac{c}{n_1})}}{1-c+\sqrt{(1-cn_1)(1-\frac{c}{n_1})}}$$

altsaa, idet $n_1 = 1$, er

$$\frac{(1-n_1)\left(1-\frac{1}{n_1}\right)}{n} = \frac{2(1-c)}{c}.\frac{(1-n_1)\left(1-\frac{1}{n_1}\right)}{1-c-\sqrt{(1-cn_1)(1-\frac{c}{n_1})}} = \frac{-4(1-c)^2}{c^2}.$$

Fölgelig for $n^1 = 1$ erholdes

$$2\left[R_1(-c,-cr_1)-R_1(-c,-\frac{c}{r_1})\right] = \begin{cases} \log r_1.F^1(c) + \frac{\pi}{2(1-c)}\log\frac{4rr_1(1-c)^2}{(1-r_1)^2c^2} \\ +\pi\left[\frac{1}{2}F^1(b)-F(b,\varphi)\right]-2U_1(-cr_1)+2U_1(-c) \\ +4\left[R_1(-c,-cr_1)-R_1(-c,-c)\right] \end{cases}$$

Indsættes nu alle disse Resultater i det sidste Udtryk for Y^1, erholdes,

$$Y_1 = \frac{1-c}{(c+n)\sqrt{(1+r)(1+\frac{c^2}{r})}}\begin{cases} \frac{\pi}{2(1-c)}(c+n)\log\frac{(1-n_1)(1-\frac{1}{n_1})(1-r_1)^2\,c^4(r-n)}{4(r_1-n_1)(r_1-\frac{1}{n_1})rn(1-c)^2(rn-c^2)} \\ +4n\left[U_1(-cr_1)-U_1(-c)\right] \\ +2(c-n)\begin{cases} R_1(-cn_1,-cr_1)+R_1(-\frac{c}{n_1},-cr_1) \\ -R_1(-cn_1,-c)-R_1(-\frac{c}{n_1},-c) \end{cases} \\ -4(c+n)\left[R_1(-c,-cr_1)-R_1(-c,-c)\right] \end{cases}$$

Combineres endelig hermed Formlerne

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = 2U_2(n,c) + \frac{c+r}{c-r} \cdot \frac{1}{1+c}\left[2\log\left(1-\frac{n}{c}\right)\Pi^1(r^1,c^1) + R_1(r^1,n^1,c^1)\right] \\ 4R_1(r,n,c) = V_1 + Y_1 \end{array}\right\}$$

saa haves den Transformation, som finder Sted for R_1 analog med de forhen fundne for U_1 og U_2, og som tjener til at oplöse Functionens anden Parameter n i de tre andre $n^1, -cr_1, -c$.

8. I Analogie med Formlerne (10) og (21) haves

$$R(r,n,c,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{d\phi . \operatorname{arc}\left(tg = \frac{tg\,\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2c\cos\phi}\right)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\phi}} \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{c}\cos\phi\right)\log\left(1+\frac{n^2}{c^2}+\frac{2n}{c}\cos\phi\right)+\frac{2r}{c}\sin\phi\operatorname{arc}\left(tg = \frac{n\sin\phi}{c+n\cos\phi}\right)}{1+\frac{r^2}{c^2}+\frac{2r}{c}\cos\phi} \tag{26}$$

Herunder er (25) indbefattet ved at sætte $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ligesaa er mere almindeligt

$$\int_0^\theta f(\sin^2\phi) . \frac{d\phi}{\Delta(c,\phi)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{d\phi . \operatorname{arc}\left(tg = \frac{tg\,\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2c\cos\phi}\right)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\phi}}\left[f\left(\frac{e^{\phi\sqrt{-1}}}{c}\right)+f\left(\frac{e^{-\phi\sqrt{-1}}}{c}\right)\right] \tag{27}$$

og ved heri at sætte $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2\varphi).\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi\left[f\left(\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}}{c}\right)+f\left(\frac{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{c}\right)\right]}{\sqrt{1+c^2-2\,c\cos\varphi}}$$

f. Ex.

$$\int_0^{\theta} \sqrt[2p]{1+n\sin^2\varphi}.\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi.\,\mathrm{arc}\left(tg=\frac{tg\,\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2\cos\varphi}\right)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}} \cos\frac{\mathrm{arc}\left(tg=\frac{n\sin\varphi}{c+n\cos\varphi}\right)}{2p},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2p]{1+n\sin^2\varphi}.\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi.\cos\frac{\mathrm{arc}\left(tg=\frac{n\sin\varphi}{c+n\cos\varphi}\right)}{2p}}{\sqrt{1+c^2-2\,c\cos\varphi}},$$

men det er en nödvendig Betingelse, at $f(\sin^2\varphi)$ lader sig udvikle efter hele positive Potenser af $\sin^2\varphi$; f. Ex. Formlen (27) kan ikke gjælde for $f(\sin^2\varphi) = \log(\sin^2\varphi)$, og man seer ogsaa at höire Side af Ligningen da bliver den samme, som vilde erholdes, hvis venstre Side havde været $2\log(\frac{1}{c}).\,\mathbf{F}(c,\theta)$, nemlig $f(\sin^2\varphi) = 2\log(\frac{1}{c})$.

Anmærkning. Ved Anvendelsen af Formlen (27) maae mærkes de Tilfælde, som give singulære Integraler. F. Ex. naar $f(\sin^2\varphi) = \frac{1}{1+n\sin^2\varphi}$, erholdes

$$\Pi(n,c,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi.\,\mathrm{arc}\left(tg=\frac{tg\,\theta}{\Delta(c,\theta)}\sqrt{1+c^2-2\,c\cos\varphi}\right)}{\sqrt{1+c^2-2c\cos\varphi}}.\frac{1+\frac{n}{c}\cos\varphi}{1+\frac{n^2}{c^2}+\frac{2n}{c}\cos\varphi}$$

hvor $n = +c$ og $n = -c$ reducere $\frac{1+\frac{n}{c}\cos\varphi}{1+\frac{n^2}{c^2}+\frac{2n}{c}\cos\varphi}$ til $\frac{1}{2}$ og derved tilsyneladende $\Pi(n,c,\theta)$ til $\frac{1}{2}\mathbf{F}(c,\theta)$, men man har

$$\frac{1+\frac{n}{c}\cos\varphi}{1+\frac{n^2}{c^2}+\frac{2n}{c}\cos\varphi}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1-\frac{n^2}{c^2}}{1+\frac{n^2}{c^2}+\frac{2n}{c}\cos\varphi}\right]$$

hvor det andet Led for $n^2 = c^2$ er forsvindende undtagen i det uendelig lille Interval fra $\varphi = \pi - \varepsilon$ til $\varphi = \pi$ eller fra $\varphi = o$ til $\varphi = \varepsilon$, eftersom $n = + c$ eller $n = - c$. Ved at tage disse singulære Integraler i Beregning, erholdes de bekjendte Udtryk for $\Pi(c,c,\theta)$ og $\Pi(-c,c,\theta)$. Det var et aldeles lignende Tilfælde som fandt Sted for $\mathbf{V}_1$ naar $r^2 = c^2$.

Rettelser.

Pag. 259.	L. 9.	For $\log(1+\sin^2\varphi)$	læs $\log(1+n\sin^2\varphi)$
— 269.	— 10.	— $U_1(n^1,c)$	— $U_1(n^1,c^1)$
— 270.	— 2 f. n.	— $\int^{\pi}$	— $\int_0^{\pi}$
— 273.	— 8 f. n.	— Aproxi-	— Approxi-
— 274.	— 6.	— $1-c^2\sin\theta$	— $1-c^2\sin^4\theta$
— 286.	— 7.	— $U_1(n^1,c^1)$	— $U_2(n^1,c^1)$
— 289.	— 6.	— R^1	— R_1
— 290.	— 4.	— $2\frac{r^2}{c^2}\cos\varphi$	— $2\frac{r}{c}\cos\varphi$
— 291.	— 2.	— $U_1(n,c)$	— $2\,U_1(n,c)$
— 292.	— 8.	— Y	— Y_1
— 298.	— 5.	— $\sqrt{(-cr_1)(1-\frac{c}{r_1})}$	— $\sqrt{(1-cr_1)(1-\frac{c}{r_1})}$
— 301.	— 3.	— $R_1(-\frac{n}{n_1},-c)$	— $R_1(-\frac{c}{n_1},-c)$
— 302.	— 9.	— fta	— fra